

Leitfaden

für den

Unterricht im Kopfrechnen

als

Grundlage eines zweckmäßigen Rechenunterrichts

überhaupt.

Für Elementarlehrer,

so wie für Diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen.

Nach einer eigenthümlichen Methode bearbeitet

von

Dr. C. C. Unger.

Erfurt,

bei dem Verfasser und in der Keyser'schen Buchhandlung.

1841.

I n h a l t.

Einleitung	Seite 1
Erster Cursus.	
Die Lehre von dem Wesen der Zahl	7
Des ersten Cursus erster Theil.	
Die Anfangsgründe der Lehre von dem Wesen der Zahl . . .	11
Erster Abschnitt. Von den Factoren der Zahlen	11
I. Das Zerlegen der Zahlen in ihre Factoren	11
II. Die allgemeine Form der Zahlen und ihre Anwendung zur Ermittelung der sämtlichen Factoren	22
III. Von dem größten gemeinschaftlichen Factor und dem Klein- sten Vielfachen gegebener Zahlen	37
Uebersicht des ersten Abschnittes	42
Zweiter Abschnitt. Die Lehre von den Resten	44
Uebersicht des zweiten Abschnittes	76
Dritter Abschnitt. Das Bilden der Zahlen aus gegebenen Ele- menten	77
Uebersicht des dritten Abschnittes	107
Vierter Abschnitt. Anwendungen	109
Uebersicht der Uebungen im Rechnen mit ungleich benann- ten Zahlen	132
Von den Decimalbrüchen als Lehrgegenstand für den Ele- mentarunterricht	134
Fünfter Abschnitt. Die Grundeigenschaften der Quadrate . .	136
Uebersicht des fünften Abschnittes	171

Des ersten Cursus zweiter Theil.		Seite
Materialien zu einer weiteren Fortführung des Unterrichts, welcher die Lehre von dem Wesen der Zahl zu seinem Gegenstande hat		173
Erster Abschnitt		174
Zweiter Abschnitt		182
Dritter Abschnitt		199
Vierter Abschnitt		212
Fünfter Abschnitt		232

Zweiter Cursus.		
Die Lehre von dem Wesen der arithmetischen Aufgaben		247
Des zweiten Cursus erster Theil.		
Die Aufgaben der praktischen Arithmetik		251
Erster Abschnitt. Die von der Proportionslehre unabhängigen Aufgaben		251
Bemerkungen über die Aufgaben des ersten Abschnittes und über die Benutzung derselben		269
Zweiter Abschnitt. Von den Aufgaben, die mit Hilfe einer Proportion sich lösen lassen		273
Bemerkungen zu den Aufgaben des zweiten Abschnittes		288
Bemerkungen über die Proportionslehre		294
Dritter Abschnitt. Von den Aufgaben, die mittelst einer zusammengesetzten Proportion gelöst werden		305
Bemerkungen über die Aufgaben des dritten Abschnittes		327

Des zweiten Cursus zweiter Theil.		
Materialien zu einer weiteren Fortführung des Unterrichts, welcher die Lehre von dem Wesen der arithmetischen Aufgaben zu seinem Gegenstande hat		330
Schlußbemerkung		360

Des ersten Cursus erster Theil.

Die Anfangsgründe der Lehre von dem
Wesen der Zahl.

Erster Abschnitt.

Von den Factoren der Zahlen.

I. Das Zerlegen der Zahlen in ihre Factoren.

§. 1. Die erste Uebung hat den Zweck, das Maaß einer Zahl zu erklären und den Unterschied zwischen Grundzahlen und zusammengesetzten Zahlen anzugeben.

Einß ist Einß, und jede Zahl besteht aus Einß mehrmal genommen,

Die Einheit ist daher das allgemeine Maaß aller Zahlen,

Es ist also die Zahl 5 so viel als 5 mal Einß

= 5 7 = 7 =

= 13 = 13 =

Ferner ist die Zahl 6 so viel als 6 mal Einß

und zugleich ist 6 = 3 = zwei.

Eben so ist die Zahl 10 so viel als 10 mal Einß

und zugleich ist 10 = 5 = zwei.

Von der 6 und der 10 ist also nicht blos die Einß ein Maaß, sondern sie haben auch die Zwei als Maaß. Von den Zahlen 5, 7 und 13 aber ist die Zwei kein Maaß. Es giebt also Zahlen, welche die Zwei als Maaß enthalten, und auch solche, bei welchen dieses nicht der Fall ist.

$a^3 b$ für zwei verschiedene Grundfactoren, von welchen der eine zur 3ten Potenz vorkommt.

a^4 wenn alle vier Factoren gleich sind, die Zahl also die 4te Potenz einer Grundzahl ist.

Es gehören also zu der Form

$abcd$ die Zahlen $210 = 2.3.5.7$; $330 = 2.3.5.11$

$a^2 bc$ „ „ $60 = 2^2.3.5$; $90 = 3^2.2.5$

$a^2 b^2$ „ „ $36 = 2^2.3^2$; $100 = 2^2.5^2$

$a^3 b$ „ „ $24 = 2^3.3$; $162 = 3^3.2$

a^4 „ „ $16 = 2^4$; $81 = 3^4$

Wenn eine Zahl aus fünf Grundfactoren besteht, so gehört sie zu einer der Formen

$abcde$; $a^2 bcd$; $a^3 bc$; $a^2 b^2 c$; $a^4 b$; $a^3 b^2$; a^5 .

Die Einübung dieser Bezeichnungsart geschieht dadurch, daß die zu einer Klasse gehörigen Formen neben einander an die Tafel geschrieben werden, und die Schüler nun zu jeder Form einige Beispiele angeben müssen. Eine vollständige Aufzählung aller Formen aber ist nur für die Zahlen erforderlich, die höchstens aus vier Grundfactoren bestehen.

Für Zahlen, die aus mehr als vier Grundfactoren zusammengesetzt sind, kommen unter den nicht zu großen Zahlen nur einzelne Formen vor. So ist z. B. die kleinste Zahl von der Form $abcde = 2310$, und die kleinste Zahl der Form $abcdef$ ist $= 30030$. Es werden deshalb von den zusammengesetzteren Zahlen auch nur einzelne Formen den Schülern vorgelegt, zu welchen sie Beispiele anzugeben haben. Man kann hierzu benutzen die Formen

a^5 ; $a^4 b$; $a^3 b^2$; $a^2 b^2 c$

a^6 ; $a^5 b$; $a^4 b^2$; $a^4 bc$; $a^3 b^3$

a^7 ; $a^6 b$; $a^5 b^2$; $a^4 b^3$; $a^3 b^2 c^2$

a^8 ; $a^7 b$; $a^6 b^2$; $a^6 bc$; $a^5 b^2 c^2$.

Hat der Schüler auf diese Weise begriffen, was unter der Form einer Zahl verstanden wird, so wird er nun noch näher vertraut mit derselben dadurch gemacht, daß er von jeder der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis 100 die Form angeben muß zu der sie gehört, und zwar zuerst in der Art, daß jede Zahl genannt und zugleich die Form derselben angegeben wird, also z. B.

Zehn ist Eins

Zehn gehört zu der Form a Zehn = = = = a Zehn = = = = a^2 Zehn = = = = a Zehn = = = = ab Sieben geh. zu der Form a Acht = = = = a^3 Neun = = = = a^2 Zehn = = = = ab Elf = = = = a Zwölf = = = = a^2b

c. u.

nach Verlauf in einer solchen Weise, daß die Zahlen der Reihe nach nur durch ihre Formen bezeichnet werden, ohne daß die Zahl selbst genannt werden darf. Ist man z. B. bereits bis zwölf = a^2b gekommen, so haben die Schüler nun nach und nach die Formen angegeben:

$a; ab; ab; a^2; a; a^2b; a; a^2b$ u.

Materialien zu der sechsten Übung.

Die Zahlen bis 100 gehören der Reihe nach zu folgenden Formen:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Form	1	a	a	a^2	a	ab	a	a^3	a^2	ab
Zahl	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Form	a	a^2b	a	ab	ab	a^4	a	a^2b	a	a^2b
Zahl	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Form	ab	ab	a	a^3b	a^2	ab	a^3	a^2b	a	abc
Zahl	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Form	a	a^5	ab	ab	ab	a^2b^2	a	ab	ab	a^3b
Zahl	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Form	a	abc	a	a^2b	a^2b	ab	a	a^4b	a^2	a^2b
Zahl	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Form	ab	a^2b	a	a^3b	ab	a^3b	ab	ab	a	a^2bc
Zahl	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Form	a	ab	a^2b	a^5	ab	abc	a	a^2b	ab	abc
Zahl	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Form	a	a^3b^2	a	ab	a^2b	a^2b	ab	abc	a	a^4b
Zahl	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Form	a^4	ab	a	a^2bc	ab	ab	ab	a^3b	a	a^2bc
Zahl	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Form	ab	a^2b	ab	ab	ab	a^5b	a	a^2b	a^2b	a^2b^2

Anmerkung. Die Uebungen, zu welchen die Decimalbrüche bei dem Kopfrechnen Veranlassung geben, bilden den Gegenstand des vierten Abschnittes in dem zweiten Theile des ersten Cursus, und sind dort ausführlich angegeben.

Fünfter Abschnitt.

Die Grundeigenschaften der Quadrate.

Die Lehre von den Eigenschaften der Quadrate ist der letzte Lehrgegenstand des ersten Cursus, welcher das Wesen der Zahl behandelt, und es bildet derselbe zugleich den Uebergang zu den Untersuchungen über das Wesen der Aufgabe. Durch die Beschäftigung mit den Eigenschaften der Quadrate werden die Schüler noch inniger vertraut mit dem Wesen der Zahlen, und lernen viele Hilfsmittel kennen, die bei Ausführung der verschiedenen Rechnungen von erheblichem Nutzen sind. Zugleich werden hier die Uebungen des zweiten Abschnittes, insofern diese den Zweck haben, aus gegebenen einzelnen Fällen allgemeine Gesetze abzuleiten, in einer umfassenden Weise fortgesetzt, und eben dadurch dient die Lehre von den Eigenschaften der Quadrate als eine Vorbereitung zu dem zweiten Cursus, der eine bereits geübtere Urtheilskraft voraussetzt, wenn die Schüler die Bedingungen einer Aufgabe gehörig fassen und richtig benutzen sollen.

§. 28. Die acht und zwanzigste Uebung macht die Schüler bekannt mit der Entstehung der Quadrate und namentlich mit der Art und Weise, wie die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe von einander abhängen. Also

1) Eins ist das Quadrat von Eins	=	*
denn es ist	$1 \times 1 = 1^2 = 1.$	
Wenn man zu Eins	 =	*
noch hinzu thut Eins	 =	*
und Zwei	 =	**
so erhält man das Quadrat von Zwei	=	$\frac{**}{**}$
Thut man zu dem Quadrat von Zwei	=	**
noch hinzu Zwei	 =	*
und Drei	 =	**

so erhält man das Quadrat von Drei = $\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array}$

In gleicher Weise findet man, wenn man zu dem Quadrate von Drei = $\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array}$

noch hinzu thut Drei = $\begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \end{array}$

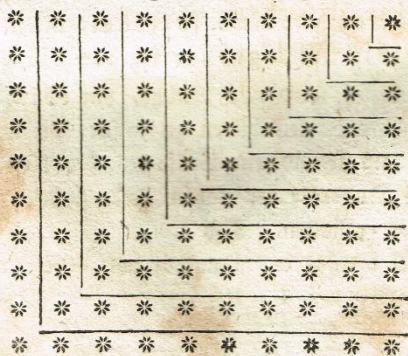
und Vier = $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * \\ \hline \end{array}$

das Quadrat von Vier = $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ \hline \end{array}$

An der Tafel kann der Lehrer dieses nun noch weiter bis zu dem Quadrate von 10 oder 12 fortsetzen, und er findet nach und nach, daß man

zu dem Quadrate von 1 addiren muß $1 + 2$, um zu erhalten 2^2
 $\begin{array}{ccccccc} = & = & = & = & 2 & = & = & 2 + 3 & = & = & = & 3^2 \\ = & = & = & = & 3 & = & = & 3 + 4 & = & = & = & 4^2 \\ = & = & = & = & 4 & = & = & 4 + 5 & = & = & = & 5^2 \\ = & = & = & = & 5 & = & = & 5 + 6 & = & = & = & 6^2 \\ = & = & = & = & 6 & = & = & 6 + 7 & = & = & = & 7^2 \\ = & = & = & = & 7 & = & = & 7 + 8 & = & = & = & 8^2 \\ = & = & = & = & 8 & = & = & 8 + 9 & = & = & = & 9^2 \\ = & = & = & = & 9 & = & = & 9 + 10 & = & = & = & 10^2 \end{array}$

die dadurch erhaltene Figur hat die Form



Erster Abschnitt.

Der erste Abschnitt enthält die Lehre von den Factoren der Zahlen; die Schüler lernen hier die Zahlen nach den Merkmalen von einander zu unterscheiden, welche denselben zukommen, insofern sie mehr oder weniger gleiche oder verschiedene Factoren enthalten, und sie werden dadurch nach und nach zu dem Begriffe der allgemeinen Form einer Zahl geführt. Soll dieser Unterricht nun erweitert werden, so kann diese Erweiterung sich nur an diesen gefundenen Begriff anschließen, und also überhaupt nur die Form der Zahl zu ihrem Gegenstande haben. Es sind daher namentlich die 6te und die 7te Uebung, welche zu diesen Erweiterungen den Stoff darbieten; während die Schüler bei diesen Uebungen aber vorzugsweise damit beschäftigt wurden, für gegebene Zahlen die Merkmale derselben aufzufinden, überhaupt ihre Form anzugeben und hieraus die Zahl der Factoren abzuleiten, welche sie enthalten müssen, und diese selbst aufzuzählen, wird bei einer weiteren Fortführung des Unterrichts der Lehrer sein Hauptaugenmerk darauf zu richten haben, daß die Schüler nun auch geübt werden, umgekehrt aus gegebenen Merkmalen, welche gewissen Zahlen zukommen, diese selbst aufzufinden. Die einfachste Uebung der Art würde nun die sein, daß die Schüler für eine gegebene Form einige denselben entsprechende Zahlen angeben müßten, diese aber bildet selbst die Einleitung zu der 4ten Uebung, und ist den Schülern bereits bekannt; eine große Anzahl dieser Art Aufgaben sind Seite 19 angegeben. Die Merkmale also, welche bei einem Fortschreiten des Unterrichts zu benutzen sind, müssen für die zu suchenden Zahlen nähere Bestimmungen enthalten, als die Form an und für sich darbietet, und diese nähere Bestimmung kann theils von der Form mehrerer Zahlen, die auf einander folgen, entnommen werden, und theils von der zum Voraus bestimmten Anzahl der Factoren, welche die zu ermittelnden Zahlen enthalten sollen, was zu folgenden verschiedenen Uebungen führt:

§. 36. a) Drei in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf einander folgende Zahlen, von welchen jede für sich kleiner als 100 ist, gehören zu den Formen:

$$a; a^3 b; ab;$$

so daß die kleinste derselben zu der Form a gehört, die folgende um 1 größere, zu der Form a^3b und die hierauf folgende zu der Form ab ; es sollen diese Zahlen gefunden werden.

Antw. Da es unter den Zahlen von 1 bis 100 viele giebt, die zu Form a gehören, und eben so auch viele von der Form ab , so lassen sich aus diesen keine Merkmale entnehmen, die schnell auf die gesuchten Zahlen führen; zu der Form a^3b aber gehören nur wenige Zahlen, und unter diesen muß eine die mittlere der 3 gesuchten Zahlen sein, wenn es dergleichen giebt, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Von den Zahlen nun, welche zu der Form a^3b gehören, ist die kleinste $= 24$, da aber die Zahlen 23; 24; 25

den Formen entsprechen $a \quad a^3b \quad a^2$

so werden durch diese, weil die dritte Zahl nicht die Form ab hat, die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllt.

Die folgende Zahl der Form a^3b ist $= 40$, und es gehören die Zahlen 39; 40; 41

zu den Formen $ab \quad a^3b \quad a$

und sie erfüllen ebenfalls die Bedingungen der Aufgabe nicht, weil hier die kleinste $= ab$ und die größte $= a$ ist, während umgekehrt die kleinste $= a$ und die größte $= ab$ sein soll.

Die nun folgende Zahl der Form a^3b ist $= 54$, und da die Zahlen 53; 54; 55

die Formen haben $a \quad a^3b \quad ab$

so sind diese die gesuchten 3 Zahlen. Es wäre nun zwar möglich, daß es unter den Zahlen, welche kleiner als 100 sind, noch 3 andere Zahlen gäbe, welche denselben Bedingungen entsprechen, es ist dieses aber, wie man leicht findet, bei der vorliegenden Aufgabe nicht der Fall.

b) Drei Zahlen, von welchen die erste um zwei kleiner als die zweite, und die zweite um drei kleiner als die dritte, und von welchen jede kleiner als 100 ist, gehören der Reihe nach zu den Formen abc , ab und a^2b ; es sollen diese Zahlen gefunden werden.

An der Tafel steht diese Aufgabe:

$abc \quad * \quad ab \quad * \quad * \quad a^2b$

und es zeigen hier die Sternchen an, wie viel Zahlen zwischen jeder und der folgenden in der natürlichen Zahlenreihe liegen.

Zweiter Cursus.

Die Lehre von dem Wesen der arithmetischen Aufgaben.

Jede arithmetische Aufgabe enthält die Forderung, eine Zahl zu finden, welcher bestimmte Eigenschaften zukommen, und diese Eigenschaften werden dadurch ausgedrückt, daß in der Aufgabe angegeben ist, wie die gesuchte Zahl von andern gegebenen Zahlen abhängen soll. Man hat es also bei der Lösung einer Aufgabe immer mit der Abhängigkeit verschiedener Zahlen von einander zu thun; es ist diese Abhängigkeit aber eine bloß zufällige, weil sie nur auf die eben zu findende Zahl sich bezieht, und auf das Verhalten derselben zu den in der Aufgabe gegebenen Zahlen. Der erste Cursus unterscheidet sich daher von dem zweiten vorzüglich dadurch, daß man es hier mit einer gegebenen zufälligen Abhängigkeit verschiedener Zahlen von einander zu thun hat, während in dem ersten Cursus ihre nothwendige Abhängigkeit von einander zu ermitteln war.

Bei der Lösung einer jeden arithmetischen Aufgabe, insofern diese zu dem zweiten Cursus gehören soll, kommt es hauptsächlich darauf an, aus den gegebenen Bedingungen die Rechnungen aufzufinden, welche vorzunehmen sind, und die Folge, in welcher sie ausgeführt werden müssen, um den Werth der gesuchten Zahl kennen zu lernen. Es gehören daher die Aufgaben nicht hierher, bei welchen durch diese selbst die vorzunehmenden Rechnungen und ihre Folge unmittelbar vorgeschrieben sind. Diese haben nur den Zweck, dem Schüler in der Ausführung bekannter Rechnungen eine größere Fertigkeit zu verschaffen; der zweite Cursus aber setzt diese Fertigkeit bereits voraus, und will nun die Urtheilskraft der mit der nothwendigen Abhängigkeit der Zahlen von einander und ihren